EJERCICIOS DE ÁLGEBRA LINEAL

TEMA 2

APLICACIONES LINEALES

APLICACIONES LINEALES

1) Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

a) $f: \Re^2 \to \Re^3$ $\quad f(x, y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x \end{pmatrix}$

b) $f: \Re \to \Re^2$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} -3x \\ 2x \end{pmatrix}$

c) $f: \Re^2 \to \Re^2$ $\quad f(x, y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $f: \Re^2 \to \Re$ $\quad f(x, y) = x\, y$

e) $f: \Re^2 \to \Re^2$ $\quad f(x, y) = \begin{pmatrix} x\cos(\phi) - y\,\mathrm{sen}(\phi) \\ x\,\mathrm{sen}(\phi) + y\cos(\phi) \end{pmatrix}$ donde $0 \le \phi \le 2\pi$

f) $f: \Re^n \to \Re^n$ $\quad f(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n + 1 \end{pmatrix}$

g) $f: M_{nxn}(\Re) \to \{A \in M_{nxn}(\Re) \,/ A = A^t\}$ $\quad f(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$

h) $f: M_{2x2}(\Re) \to \{A \in M_{2x2}(\Re) \,/ A = A^t\}$ $\quad f(A) = A.A^t$

i) $f: P_2(\Re) \to P_2(\Re)$ $\quad f(p(x)) = p(x+1)$

j) $f: P_2(\Re) \to P_1(\Re)$ $\quad f(p(x)) = p(x+1) - p(x)$

2) En $\Re^3$ se consideran $S = L\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ y $T = L\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

a) Expresar $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3$ como suma de un vector $\vec{x}_s \in S$ y otro $\vec{x}_t \in T$.

b) Dada la aplicación $f: \Re^3 \to \Re^3$ definida como $f(\vec{x}) = \vec{x}_s$, demostrar que es lineal.

Matriz de una aplicación lineal

3) Sea V espacio vectorial de dimensión 2, $B = \{e_1, e_2\}$ base de V y f y g aplicaciones lineales de V en V definidas por las ecuaciones: $\begin{cases} f(e_1) = -3e_1 + e_2 \\ f(e_2) = \ \ e_1 - e_2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} g(e_1) = e_1 + e_2 \\ g(e_2) = e_1 \end{cases}$

Encontrar las ecuaciones matriciales que definen a las aplicaciones lineales f, g, $f \circ g$, $g \circ f$, $2f^2 - 3g^2$ respecto de B.

4) Encontrar la matriz, respecto de las bases usuales en los correspondientes espacios vectoriales, de las siguientes aplicaciones lineales.

a) $f: M_{2x2}(\Re) \to M_{2x1}(\Re)$ tal que $f(A) = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $g: M_{2x2}(\Re) \to M_{2x2}(\Re)$ tal que $g(A) = A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^a$

c) $h: P_3(\Re) \to P_3(\Re)$ tal que $h(p(x)) = p(x+1)$

5) a) Sea $f: \Re^4 \to M_{2x2}(\Re)$ definida por la expresión $f(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c-d & a-b \end{pmatrix}$. Obtener la matriz, respecto de las bases canónicas (o usuales), de la aplicación lineal f. Obtener los subespacios imagen de f (im$f$) y núcleo de f (ker$f$).

b) Sea $f: P_3(\Re) \to P_3(\Re)$ tal que $f(p(x)) = p(x+1) - p(x)$. Obtener la matriz, respecto de las bases usuales, de la aplicación lineal f. Obtener ker(f) e im(f).

6) Sea f la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar una base y las ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios im$f$ y ker$f$.

7) Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de ecuaciones: $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_3 \\ y_2 = -x_1 - x_2 - x_3 \\ y_3 = 2x_2 - 3x_3 \\ y_4 = x_1 - x_3 \end{cases}$

a) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de ker*f* e im*f*.

b) Si T = $L\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$, calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de f^{-1}(T).

Monomorfismos, Epimorfismos e Isomorfismos

8) Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(a,b,c) = \begin{pmatrix} b+2a \\ a-c \\ 2(c-a)\end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz de la aplicación *f* con respecto a la base canónica de $\mathfrak{R}^3$
b) Calcular las ecuaciones implícitas de ker*f* y las paramétricas de im*f*, especificando una base de cada subespacio.
c) Razonar si *f* es isomorfismo.
d) Calcular $f^{-1}\left(L\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}\right)$

9) Sea $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por la expresión *f* (a, b, c, d) = $\begin{pmatrix} c-d \\ b \\ a+b\end{pmatrix}$.

a) Calcular la matriz de la aplicación con respecto a las bases canónicas.
b) Calcular las ecuaciones implícitas de ker*f* . Obtener una base de ker*f* y otra de im*f* .
c) Razonar si es monomorfismo,epimorfismo o isomorfismo.

10) Sea $f_k:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & k & 0 \\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) ¿Para qué valores reales de k es f_k isomorfismo?
b) Hallar f_1^{-1}(S) donde S = $L\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Existencia y Unicidad de aplicaciones lineales

11) Averiguar si $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es un homomorfismo y en caso afirmativo, analizar si es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo, en los siguientes casos: a) *f*(1, –1, 0) = (2, 1), *f*(0, –1, 2) = (1, 1), *f*(3, 0, 1) = (0, 3)
b) *f*(1, –1, 0) = (2, 1), *f*(0, –1, 2) = (1, 1), *f*(1, –2, 2) = (–1, 4), *f*(3, 0, 1) = (0, 3)

12) Definir una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que ker*f* = $L\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ e im*f* = $L\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ¿Es *f* única?

13) Obtener un homomorfismo $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que ker*f* = $L\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$ e im*f* = $L\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ¿Es *f* única?

14) Hallar una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que ker*f* = { $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^3$ / x + z = 0}, *f*(1, 0, 0) es proporcional a $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ y $f \circ f = f$. ¿Es *f* única?

Ejercicios diversos

15) Dadas las aplicaciones lineales f: = $\Re^3 \to M_{2x2}(\Re)$ y g: $M_{2x2}(\Re) \to \Re^4$ definidas por:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x-y & y \\ y & y-z \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (0, a_{11}, a_{12} + a_{21}, a_{22})$$

a) Hallar las matrices asociadas a f y a g respecto de las bases usuales.
b) Hallar los núcleos e imágenes de f y g.
c) Hallar la matriz de la composición $g \circ f$, su núcleo y su imagen.

16) Estudiar si existen homomorfismos tales que:
a) f: $\Re^4 \to \Re^3$ definida sobre B = { p_1 = (1,0,1,2), p_2 = (1,1,0,0), p_3 = (1,0,0,1), p_4 = (0,1,0,-1) } como $f(p_1)$ = (-1,1,0), $f(p_2)$ = (1,0,3), $f(p_3)$ = (0,0,1), $f(p_4)$ = (1,0,0).
b) g:V $\to \Re^3$ donde V = L{p_1, p_2, p_3}, definida como $g(p_1)$ = (-3, 2, 0); $g(p_2)$ = (-1,0,1); $g(p_3)$ = (1,1,0).
c) g': $\Re^4 \to \Re^3$ tal que $g'(p_i) = g(p_i)$, i = 1, 2, 3 y kerg' = L{(1,1,1,0)}

17) Sea f : $M_{2x2}(\Re) \to \Re^3$ la aplicación lineal definida por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = (0, a+b, a+d). Se pide:
a) Matriz de f respecto de las bases usuales en ambos espacios.
b) Base de im$f$ y un suplementario de im$f$ en $\Re^3$.
c) Base de S = ker$f$. Hallar un subespacio T suplementario de S en $M_{2x2}(\Re)$. Escribir $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ como suma de un vector de S y otro de T.
d) Comprobar que $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ forman una base de S y hallar las coordenadas de la matriz $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ respecto de dicha base.
e) Ampliar la base {M_1, M_2} a una base de $M_{2x2}(\Re)$ de forma que las dos primeras coordenadas de M_1, M_2 y M_3 en dicha base sean nulas.
f) Hallar f^{-1}(L{ (0,3,4) }).

Cambio de base

18) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 a B_2 para las siguientes bases:
a) $B_1 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \; B_2 = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
b) B_1 = {e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)}; B_2 = {u_1 = (2, 3, 4), u_2 = (1, 2, 6), u_3 = (1, 3, 5)}
c) B_1 = {e_1 = (2, 1), e_2 = (5, 3)}; B_2 = {u_1 = (1, -1), u_2 = (1, 1)}
d) B_1 = {e_1, e_2, e_3} y B_2 = {e'_1, e'_2, e'_3} tal que $e'_1 = 2e_1 - e_2 - e_3$ $e'_2 = -e_2$ $e'_3 = 2e_2 + e_3$

19) En $\Re^3$, dadas las bases B={(1,-1,3), (0,1,-1), (0,3,-2)} y B'={(1,-2,3), (1,-1,1), (2,4,7)} calcular las ecuaciones del cambio de base de B' a B.

Matrices asociadas a una misma aplicación lineal

20) Sea f: $\Re^3 \to \Re^3$ la aplicación lineal que cumple:
$f(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$; $f(-1, 1, 1) = (0, 0, 1)$; $f(-1, -2, 1) = (0, 0, 0)$.
a) Obtener la matriz de f respecto de la base canónica.
b) Obtener la matriz de f respecto de la base B = {(1, 1, 1), (–1, 1, 1), (–1, –2, 1)}

21) Sea f : $\Re^4 \to \Re^4$ un endomorfismo del que se sabe que
f (1, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, –1), f (1, 0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0), *ker f = im f*
Determinar la matriz asociada a f en la base canónica de $\Re^4$

22) Sea B = {e_1, e_2, e_3} la base canónica de $\Re^3$ y f: $\Re^3 \to \Re^3$ definida por:
$f(e_1) + f(e_2) = ae_1 + (a + 1)e_2 + e_3$ $\qquad f(e_1) + f(e_3) = -e_1 + ae_2 + 2e_3$ $\qquad f(e_3) = -e_1 + e_3$
a) Hallar la matriz de f respecto de B y calcular para qué valores reales del parámetro a f es biyectiva.

b) Para $a = 2$ se considera la base B´ = {$u_1 = e_1 - e_2$, $u_2 = e_3$, $u_3 = 2e_2 + e_3$}. Hallar la matriz de *f* respecto de B´.
c) Para a = 1 hallar f^{-1}({(-2,-2,0)}). Dado el s.v. W = L{(1,1,0),(2,0,1)} razonar si W y ker*f* son suplenetarios y si ker*f* e im*f* son suplementarios.

23) Sean U = L{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1)}, V = L{(0, 0, 0, 1), (–1, 1, –1, 0)} y f: U → V definida por:
f(1, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 1), f(0, 1, 1, 1) = (–1, 1, –1, 1), f(1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0).
a) Obtener bases de U y V de forma que al colocar los vectores de dichas bases como filas de una matriz, se obtenga una forma echelon-fila.
b) Dar la matriz de f respecto de las bases obtenidas en el apartado a).

24) Sea $f:\Re^3 \to \Re^3$ la aplicación lineal que verifica
$f(0, 0, -1) = (2, -5, -3)$ y $f(s) = 3s$ $\forall s \in S = \{(x, y, z) \in \Re^3 \ / \ x + z = 0\}$. Hallar la matriz de *f* respecto de la base canónica de $\Re^3$ y $f^{-1}(r)$ siendo r la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

25) Sea la aplicación $f:\Re^3 \to \Re^4$ definida por la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

y sean $U = L(B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0)\})$ subespacio vectorial de $\Re^3$ y $V = L(B_2 = \{(1, 0, 0, -1), (1, 1, 1, -1), (2, 0, -1, 1)\})$ subespacio vectorial de $\Re^4$. Obtener la matriz de la aplicación $f:U \to V$ respecto de las bases B_1 y B_2.

26) Sea $f:\Re^3 \to \Re^3$ la aplicación lineal que verifica que
- dim im*f* = 1
- las ecuaciones del ker*f* respecto de la base B´ = { $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1)$} son $x + y = 0$
- existe un vector no nulo v = (b, 0, 0) verificando que $f(v) = f^2(v) = u_1 + u_2 + u_3$.

Hallar las ecuaciones de *f* respecto de la base canónica.

27) Sean $f : \Re^3 \to \Re^3$ una aplicación lineal, $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\Re^3$ y $B´ = \{u_1, u_2, u_3\}$ la base de $\Re^3$ tal que $u_1 = 2e_1 - e_2$; $u_2 = - e_1 + 2 e_2$; $u_3 = e_1 + e_2 + 2e_3$
Sabiendo que dim ker*f* = 2, $e_1 - e_2 \in$ im*f*, $f^2 = f$ y que la matriz de *f* respecto de B_c coincide con la matriz de *f* respecto de B´
a) Hallar la matriz de *f* respecto de B_c.
b) Obtener las ecuaciones implícitas de ker*f* e im*f*.

28) Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, S = L{A, B, C} y g:S→ $\Re^3$ tal que g(A) = (0,1,0), g(B) = (1,0,1), g(C) = (1,1,1).
a) Calcular bases de im*g* y ker*g*. Calcular las ecuaciones de *g* respecto de las bases B_1 = {A, B, C} y $B_c^{\Re^3}$ y respecto de las bases B_3 = {A, B, E=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$} y B’ = {(0,1,0), (1,0,1), (1,0,0)}
b) Estudiar si existe algún homomorfismo *f* : S→ $\Re^3$ tal que *f*(A) = (0,1,0), *f*(B) = (1,0,1), *f*(C) = (1,1,1), *f*(D) = (0,1,2).

DIAGONALIZACIÓN

1) Para los siguientes endomorfismos de $\Re^2$, hallar los subespacios propios y estudiar qué representan éstos geométricamente:

a) $f(x,y) = (x, 2y)$ b) $g(x,y) = (x + y, 0)$

c) $h(x, y) = (2x - y, x - 2y)$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) Determinar los autovalores y subespacios propios de los siguientes endomorfismos de $\Re^3$:

a) $f(x, y, z) = (x, z, -y)$ b) $f(x, y, z) = (x - y + 3z, 2y - 3z, -z)$.

c) $f(x, y, z) = (x - y + 3z, y - 3z, -z)$ d) $f(x, y, z) = (x - y + z, 2y - z, z)$.

3) Sea $f : \Re^4 \to \Re^4$ definido por $f(a,b,c,d) = (a+b+c+d, b+2c+3d, c+3d, d)$. Calcular sus autovalores y sus subespacios propios.

4) Estudiar la diagonalización de los endomorfismos:

a) $f : \Re^3 \to \Re^3$ definido por $f(x, y, z) = (x, -z, -y)$.

b) $f : M_{2x2}(\Re) \to M_{2x2}(\Re)$ definido por $f(A) = A^t$.

c) $f : \Re^3 \to \Re^3$ definido por $f(x, y, z) = (-z, 0, x)$.

5) Calcular la matriz diagonal D y la matriz P del cambio de base tales que $D = P^{-1} A P$, siendo

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6) Sea f el endomorfismo de $\Re^3$ de ecuaciones: $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = -x_1 - x_2 \\ y_3 = -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$

Averigüar si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, obtener su forma diagonal y la matriz de cambio de base.

7) Si $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\Re^3$, estudiar si es diagonalizable el endomorfismo de $\Re^3$ definido por las ecuaciones $f(e_1 - e_2) = (-3, -2, 1)$; $f(e_1 + e_3) = (-3, -3, 0)$; $f(3e_2 - 3e_3) = (4, 3, 1)$,

8) Determinar, según los valores del parámetro real a, cuándo los endomorfismos siguientes son diagonalizables y obtener la forma diagonal en los casos que sea posible.

a) $f(x, y, z) = (x - 2y - (2 + a) z , y + az , z)$
b) $f(x, y, z) = (x + a (x - y + z) , (a + 2) x - ay + (a - 1) z , 2x - y)$
c) $f(x, y, z, t) = (x, 2x, x, x + ay)$
d) $f(x, y, z) = (a x + b y, - y, z)$

9) Diagonalizar el endomorfismo definido en $\Re^4$ como $f(a,b,c,d) = (d,c,b,a)$

10) Sea $f:M_{2x2}(\Re)\to M_{2x2}(\Re)$ la aplicación lineal definida por $f(A) = AF - FA$ siendo $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcular el polinomio característico y el espectro de f.
b) La base de autovectores, si existe, respecto de la que la matriz de f es diagonal.

11) Sea $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\Re^3$ y f un endomorfismo de $\Re^3$ del que se sabe que

- $u_1 = e_1 - e_3$ es un autovector
- $f(2e_1 + e_2 + 2e_3) = 3e_1 + 6e_2 + 3e_3$
- $f(2e_1 - e_2) = -e_1 + e_3$
- la suma de los autovalores de f es 2.

a) Calcular las ecuaciones de f respecto de la base B_c.
b) Hallar una base de $\Re^3$, formada por autovectores de f respecto de la que su matriz es diagonal.

12) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcular A^n, $n \in N$.

13) Sabiendo que el endomorfismo $f: \Re^2 \to \Re^2$ es diagonalizable, que los vectores (1, 2) y (3, 1) son vectores propios y que $f(5, -5) = (2, -1)$, hallar los autovalores de f y la matriz de f en la base canónica.

14) Sea f el endomorfismo de $\Re^3$ con espectro $\sigma(f) = \{1, 2, -1\}$ y que tiene por vectores propios correspondientes a dichos autovalores: (1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 2, 1). Obtener la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\Re^3$.

15) Sea f el endomorfismo de $\Re^4$ dado por la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y sea $L_1 = L\{ (1, 0, -2, -1) \}$.

a) Comprobar que $f(L_1) \subset L_1$.
b) Calcular L_2, subespacio de $\Re^4$, tal que $f(L_2) = L_2$ y $L_1 \subset L_2$, siendo estricto el contenido.